A.S :2007/2008

Devoir de contrôle N°1

Classes 4ème sc

Durée : 2.h

Exercice N°1: (6 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o;\vec{u};\vec{v})$.

A , B, M et M' sont les points d'affixes respectives : 2 , 2i , Z (différent de 2) et $Z'=\dfrac{iZ+2}{2Z-4}$

1/ On prend, dans cette question, $Z=1+i$
Donner la forme algébrique ainsi que l'écriture trigonométrique de Z'

2/a) justifier les égalités suivantes : $|2Z-4|=2MA$ et $|iZ+2|=MB$

b) Caractériser l'ensemble $E=\left\{ M(Z) \text{ tel que : } |Z'|=\dfrac{1}{2} \right\}$

3/a) Montrer que pour $Z\neq 2$ et $Z\neq 2i$, on a : $\arg(Z')\equiv\dfrac{\pi}{2}+\arg(\dfrac{Z-2i}{Z-2})[2\pi]$

b) Exprimer $\arg(Z')$ à l'aide de $(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}})$

c) Caractériser l'ensemble $F=\{ M(Z) \text{ tel que : } Z' \text{ est imaginaire pur} \}$

Exercice N°2: (5 pts)

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}+\sqrt{x^2-9} & \text{si } x\in[3;+\infty[\\ \dfrac{2\sin(x-3)}{x^2-3x} & \text{si } x\in]-\infty;0[\cup]0;3[\end{cases}$

1/ Donner le domaine de définition de f

2/ Montrer que f est continue sur $[3;+\infty[$

3/a) Calculer $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$. f est-elle continue en 3 ?

b) Donner le domaine de continuité de f

4/a) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Montrer que pour $x<0$, on a : $\dfrac{-2}{x^2-3x}\leq f(x)\leq\dfrac{2}{x^2-3x}$; En déduire $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Exercice N°3: (4 pts)

Soit f la fonction définie sur $\left]-\infty,1\right]$ par $f(x)=-x^3+\sqrt{1-x}$

1/ Montrer que f est continue sur $\left]-\infty,1\right]$

2/ Etudier la monotonie de f

3/ Déterminer l'image de $\left]-\infty,1\right]$ par f

4/a) Monter que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]0;1\right[$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude $\frac{1}{2}$

Exercice N°4: (5 pts)

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

1/a) Montrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}\ , u_n < 2$

b) Montrer que (u_n) est croissante

c) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite

2/ Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$

a) Montrer que v est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$

b) En déduire v_n à l'aide de n et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n$

c) Exprimer u_n à l'aide de n et retrouver $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$